1) Dados os vetores $\vec{M} = -10\hat{a}_x + 4\hat{a}_y - 8\hat{a}_z$, e $\vec{N} = 8\hat{a}_x + 7\hat{a}_y - 2\hat{a}_z$, determine:

(a) um vetor unitário na direção de $-\vec{M} + 2\vec{N}$;

(b) o módulo de $5\hat{a}_x + \vec{N} - 3\vec{M}$

(c) $|\vec{M}|.|\vec{N}|.(\vec{M} + \vec{N})$

a) $-\vec{M} = +10\hat{a}_x - 4\hat{a}_y + 8\hat{a}_z$ e $2\vec{N} = 16\hat{a}_x + 14\hat{a}_y - 4\hat{a}_z$, assim $-\vec{M} + 2\vec{N} = 26\hat{a}_x + 10\hat{a}_y + 4\hat{a}_z$.

O vetor unitário nesta direção será $\hat{u} = \frac{-\vec{M}+2\vec{N}}{|-\vec{M}+2\vec{N}|} = \frac{26\hat{a}_x+10\hat{a}_y+4\hat{a}_z}{\sqrt{26^2+10^2+4^2}} = \frac{26}{\sqrt{792}}\hat{a}_x + \frac{10}{\sqrt{792}}\hat{a}_y + \frac{4}{\sqrt{792}}\hat{a}_z$

b) $-3\vec{M} = +30\hat{a}_x - 12\hat{a}_y + 24\hat{a}_z$, assim $5\hat{a}_x + \vec{N} - 3\vec{M} = 43\hat{a}_x - 5\hat{a}_y + 22\hat{a}_z$. O módulo deste será $\sqrt{43^2 + 5^2 + 22^2} = \sqrt{2358}$

c) $|\vec{M}| = \sqrt{10^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{180}$, $|\vec{N}| = \sqrt{8^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{117}$ e $\vec{M} + \vec{N} = -2\hat{a}_x + 11\hat{a}_y - 10\hat{a}_z$, assim

$|\vec{M}|.|\vec{N}|.(\vec{M} + \vec{N}) = -2\sqrt{21060}\hat{a}_x + 11\sqrt{21060}\hat{a}_y - 10\sqrt{21060}\hat{a}_z$.

2) Dados três pontos A(4, 3, 2), B(- 2, 0, 5) e C(7, - 2, 1):
(a) determine o vetor A dirigido da origem ao ponto A;
(b) determine um vetor unitário dirigido da origem ate o ponto médio da linha AB;
(c) calcule o perímetro do triangulo ABC.

a) $\vec{A} = 4\hat{a}_x + 3\hat{a}_y + 2\hat{a}_z$

b) $$Vetor\ da\ orígem\ até\ o\ ponto\ médio\ de\ \vec{A}\ para\ \vec{B} = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2} + \vec{A} = \frac{\vec{B} + \vec{A}}{2} = \hat{a}_x + \frac{3}{2}\hat{a}_y + \frac{7}{2}\hat{a}_z$$

$$Versor\ da\ orígem\ até\ o\ ponto\ médio\ de\ \vec{A}\ para\ \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{\frac{62}{4}}}\left(\hat{a}_x + \frac{3}{2}\hat{a}_y + \frac{7}{2}\hat{a}_z\right) = \frac{2}{\sqrt{62}}\hat{a}_x + \frac{3}{\sqrt{62}}\hat{a}_y + \frac{7}{\sqrt{62}}\hat{a}_z$$

c) $$Distância\ entre\ A\ e\ B \rightarrow |\vec{B} - \vec{A}| = |-6\hat{a}_x - 3\hat{a}_y + 3\hat{a}_z| = \sqrt{54}$$

$$Distância\ entre\ B\ e\ C \rightarrow |\vec{C} - \vec{B}| = |9\hat{a}_x - 2\hat{a}_y - 4\hat{a}_z| = \sqrt{101}$$

$$Distância\ entre\ A\ e\ C \rightarrow |\vec{C} - \vec{A}| = |3\hat{a}_x - 5\hat{a}_y - \hat{a}_z| = \sqrt{35}$$

$$Perímetro \rightarrow \sqrt{54} + \sqrt{101} + \sqrt{35}$$

3) Um campo vetorial e dado por $\vec{G} = 24xy\hat{a}_x + 12(x^2+2)\hat{a}_y + 18z^2\hat{a}_z$. Dados dois pontos, P(1, 2, -1) e Q(-2, 1, 3), determine:
(a) G em P;
(b) um vetor unitário da direção de G em Q;
(c) um vetor unitário dirigido de Q ate P;
(d) a equação da superfície na qual $|\vec{G}| = 60$

a) $$\vec{G}(P) = 24\text{x}1\text{x}2\hat{a}_x + 12(1^2+2)\hat{a}_y + 18(-1)^2\hat{a}_z = 48\hat{a}_x + 36\hat{a}_y + 18\hat{a}_z$$

b) $$\vec{G}(Q) = 24\text{x}(-2)\text{x}1\hat{a}_x + 12\left((-2)^2+2\right)\hat{a}_y + 18x3^2\hat{a}_z = -48\hat{a}_x + 72\hat{a}_y + 162\hat{a}_z$$

$$Vetor\ uitário = \frac{-48\hat{a}_x + 72\hat{a}_y + 162\hat{a}_z}{\sqrt{33732}}$$

c) $$Vetor\ de\ Q\ para\ P \rightarrow \vec{P} - \vec{Q} = 3\hat{a}_x + \hat{a}_y - 4\hat{a}_z$$

$$Vetor\ unitário = \frac{3\hat{a}_x + \hat{a}_y - 4\hat{a}_z}{\sqrt{26}}$$

d) $$|\vec{G}| = \sqrt{24^2x^2y^2 + 12^2(x^2+2)^2 + 18^2z^4} = 60$$

$$16x^2y^2 + 4(x^2+2)^2 + 9z^4 = 100$$

4) Dado o campo vetorial $\vec{E} = 4zy^2\cos(2x)\hat{a}_x + 2zy\text{sen}(2x)\hat{a}_y + y^2 sen(2x)\hat{a}_z$, determine, para as regiões, $|x|, |y|\ e |z| < 2$:
(a) as superfícies nas quais $E_y = 0$;
(b) a região na qual $E_y = E_z$
(c) a região para a qual $|\vec{E}| = 0$

a)

$$E_y = 2zy\text{sen}(2x) = 0 \text{ para os planos } z = 0\,, y = 0 \text{ e } x = \frac{n\pi}{2}, onde\ n\ \text{é}\ inteiro$$

b)

$$E_y = 2zy\text{sen}(2x) = E_z = y^2 sen(2x) \to (2zy - y^2)\text{sen}(2x) = 0\ para\ os\ planos\ y = 0, 2z - y = 0\ \ e\ x = \frac{n\pi}{2}$$

c)

$$|\vec{E}|^2 = 16z^2y^4cos^2(2x) + 4z^2y^2sen^2(2x) + y^4sen^2(2x) = 0$$

$$Plano\ y = 0$$

$$Superfície$$

$$16z^2y^2 + (4z^2 + y^2 - 16z^2y^2)sen^2(2x) = 0$$

5) Dados os pontos M(0,1; - 0,2; - 0,1), N(-0,2; 0,1; 0,3) e P(0,4; 0; 0,1), determine:
(a) o vetor R_{MN};
(b) o produto escalar R_{MN} e R_{MP};
(c) a projeção escalar de R_{MN} em R_{MP};
(d) o angulo entre R_{MN} e R_{MP}.

a) $$\vec{R}_{MN} = \vec{N} - \vec{M} = -0{,}3\hat{a}_x + 0{,}3\hat{a}_y + 0{,}4\hat{a}_z$$

b) $$\vec{R}_{MP} = \vec{P} - \vec{M} = 0{,}3\hat{a}_x + 0{,}2\hat{a}_y + 0{,}2\hat{a}_z$$

$$\vec{R}_{MN} \cdot \vec{R}_{MP} = -0{,}09 + 0{,}06 + 0{,}08 = 0{,}05$$

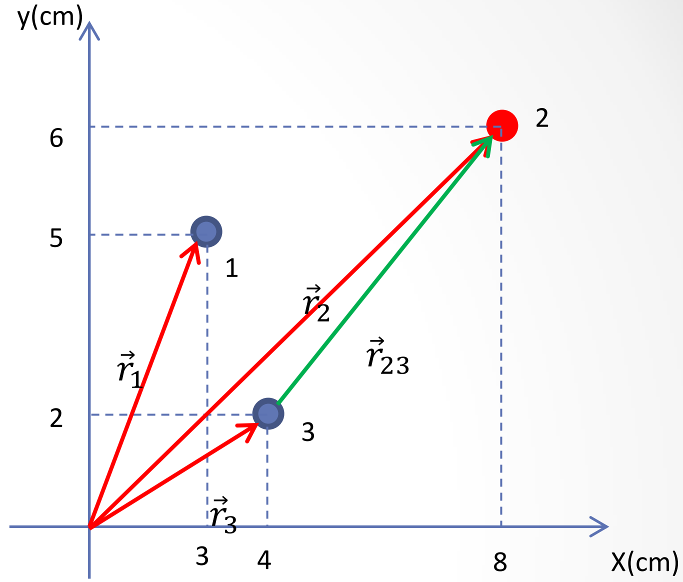
c) $O\ produto\ escalar\ entre\ \vec{A}\ e\ \vec{B}\ \text{é}\ a\ projeção\ de\ \vec{A}\ em\ \vec{B}\ vezes\ o\ módulo\ de\ \vec{B}$

$$A\ projeção\ de\ \vec{R}_{MN}\ em\ \vec{R}_{MP} = \frac{\vec{R}_{MN} \cdot \vec{R}_{MP}}{|\vec{R}_{MP}|} = \frac{0{,}05}{\sqrt{0{,}17}}$$

d) $$\vec{R}_{MN} \cdot \vec{R}_{MP} = |\vec{R}_{MN}||\vec{R}_{MP}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{R}_{MN} \cdot \vec{R}_{MP}}{|\vec{R}_{MN}||\vec{R}_{MP}|} = \frac{0{,}05}{\sqrt{0{,}34}\sqrt{0{,}17}}$$

6) A figura abaixo mostra 3 cargas pontuais de valores q1 = 3 μC, q2 = -5μC e q3 = 1μC.
a) Descreva os vetores posições de cada carga usando os versores da base cartesiana.
b) Descreva o vetor posição da carga 2 com relação a carga 3 e o seu versor correspondente.
c) Calcule o vetor força de cada carga e o total sobre a carga 1, considerando a interação das duas outras cargas.



a)

$$\vec{r}_1 = 3\hat{a}_x + 5\hat{a}_y \qquad \vec{r}_2 = 8\hat{a}_x + 6\hat{a}_y$$

$$\vec{r}_3 = 4\hat{a}_x + 2\hat{a}_y$$

b)

$$\vec{r}_{23} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3 = 4\hat{a}_x + 4\hat{a}_y$$

$$\hat{r}_{23} = \frac{4\hat{a}_x + 4\hat{a}_y}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_y$$

c)

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\hat{r}_{12} = k\frac{q_1q_2}{26x10^{-4}}\frac{-5x10^{-2}\hat{a}_x - 1x10^{-2}\hat{a}_y}{\sqrt{26}x10^{-2}} = -9x10^9\frac{(3x10^{-6})(-5x10^{-6})}{26\sqrt{26}x10^{-6}}5x10^{-2}\hat{a}_x - 9x10^9\frac{(3x10^{-6})(-5x10^{-6})}{26\sqrt{26}}1x10^{-2}\hat{a}_y$$

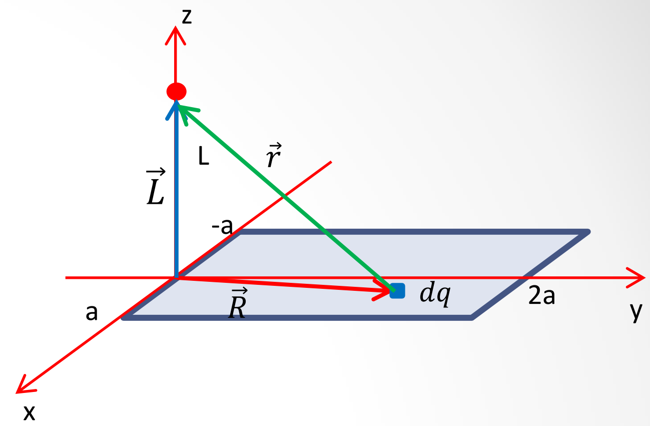
$$\vec{F}_{12} = 51\hat{a}_x + 10\hat{a}_y\ N$$

$$\vec{F}_{13} = k\frac{q_1q_3}{|\vec{r}_{13}|^2}\hat{r}_{13} = k\frac{q_1q_3}{10x10^{-4}}\frac{-1x10^{-2}\hat{a}_x + 3x10^{-2}\hat{a}_y}{\sqrt{10}x10^{-2}} = -9x10^9\frac{(3x10^{-6})(1x10^{-6})}{10\sqrt{10}x10^{-6}}1x10^{-2}\hat{a}_x + 9x10^9\frac{(3x10^{-6})(1x10^{-6})}{10\sqrt{10}}3x10^{-2}\hat{a}_y$$

$$\vec{F}_{12} = -8{,}5\hat{a}_x + 26\hat{a}_y\ N$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = 43\hat{a}_x + 36\hat{a}_y\ N$$

7) A figura abaixo mostra uma superfície quadrada de lado 2a, carregada com carga total Q.
a) Escreva a expressão integral de todas as componentes do campo elétrico para o cálculo do campo elétrico num ponto a uma distância L em cima do eixo z.
b) Calcule o vetor campo elétrico no ponto do item a.



a)

$$\vec{L} = L\hat{a}_z \qquad \vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y$$

$$\vec{r} = \vec{L} - \vec{R} = L\hat{a}_z - x\hat{a}_x - y\hat{a}_y \qquad \hat{r} = \frac{L\hat{a}_z - x\hat{a}_x - y\hat{a}_y}{\sqrt{L^2 + x^2 + y^2}}$$

$$\vec{E}_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_S dS}{r^2}\hat{r} = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{(L^2 + x^2 + y^2)} \frac{L\hat{a}_z - x\hat{a}_x - y\hat{a}_y}{\sqrt{L^2 + x^2 + y^2}} dxdy$$

$$\vec{E}_L = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\int \frac{x}{(L^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy\ \hat{a}_x - \int \frac{y}{(L^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy\ \hat{a}_y + \int \frac{L}{(L^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy\ \hat{a}_z\right\}$$

b)

$$\vec{E}_x = -\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\int_{-a}^{a} \frac{x}{(L^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy\ \ \hat{a}_x = -\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\left[\frac{-1}{\sqrt{L^2 + x^2 + y^2}}\right]_{-a}^{a} dy\ \ \hat{a}_x = 0$$

Pode se argumentar por simetria

$$\vec{E}_y = -\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\int_0^{2a} \frac{y}{(L^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} dydx\ \ \hat{a}_y = -\frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\left[\frac{-1}{\sqrt{L^2 + x^2 + y^2}}\right]_0^{2a} dx\ \ \hat{a}_y$$

$$\vec{E}_y = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2 + x^2 + 4a^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + x^2}}\right] dx\ \ \hat{a}_y = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ln\left[\frac{\sqrt{L^2 + x^2 + 4a^2} + x}{\sqrt{L^2 + 4a^2}}\right] - ln\left[\frac{\sqrt{L^2 + x^2} + x}{|L|}\right]\right\}_{-a}^{a}\hat{a}_y$$

Continua

Continuação da questão 7

$$\vec{E}_y = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ln\left[\frac{\sqrt{L^2+a^2+4a^2}+a}{\sqrt{L^2+4a^2}}\right] - ln\left[\frac{\sqrt{L^2+a^2+4a^2}-a}{\sqrt{L^2+4a^2}}\right] - ln\left[\frac{\sqrt{L^2+a^2}+a}{|L|}\right] + ln\left[\frac{\sqrt{L^2+a^2}-a}{|L|}\right]\right\}\hat{a}_y$$

$$\vec{E}_y = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ln\left[\frac{\sqrt{L^2+5a^2}+a}{\sqrt{L^2+5a^2}-a}\right] - ln\left[\frac{\sqrt{L^2+a^2}+a}{\sqrt{L^2+a^2}-a}\right]\right\}\hat{a}_y$$

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_S L}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\int_{-a}^{a}\frac{1}{(L^2+x^2+y^2)^{3/2}}dxdy\ \hat{a}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\left[\frac{x}{(L^2+y^2)\sqrt{L^2+x^2+y^2}}\right]_{-a}^{a}dy\ \hat{a}_z$$

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\left[\frac{a}{(L^2+y^2)\sqrt{L^2+a^2+y^2}} - \frac{-a}{(L^2+y^2)\sqrt{L^2+a^2+y^2}}\right]dy\ \hat{a}_z = \frac{2a\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\left[\frac{1}{(L^2+y^2)\sqrt{L^2+a^2+y^2}}\right]dy\ \hat{a}_z$$

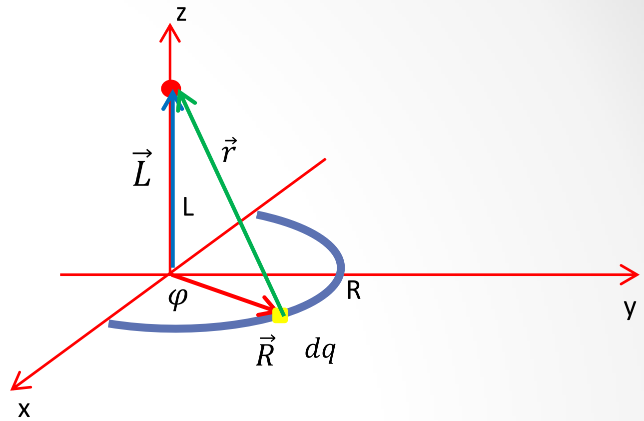
$$\vec{E}_z = \frac{2a\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\left[\frac{1}{(L^2+y^2)\sqrt{L^2+a^2+y^2}}\right]dy\ \hat{a}_z$$

Esta eu ainda não resolvi.

8) A figura abaixo mostra uma linha de carga semicircular de raio R, carregada com carga total Q.
a) Escreva a expressão integral de todas as componentes do campo elétrico para o cálculo do campo elétrico num ponto a uma distância L em cima do eixo z que está posicionado no centro do semicírculo.
b) Calcule o vetor campo elétrico no ponto do item a.

a) $\vec{L} = L\hat{a}_z \qquad \vec{R} = R\hat{a}_\rho$

$$\rho_l = \frac{Q}{\pi R}$$



$$\vec{r} = \vec{L} - \vec{R} = L\hat{a}_z - R\hat{a}_\rho \qquad \hat{r} = \frac{L\hat{a}_z - R\hat{a}_\rho}{\sqrt{L^2 + R^2}}$$

$$\vec{E}_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_l dl}{r^2}\hat{r} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{(L^2+R^2)}\frac{L\hat{a}_z - R\hat{a}_\rho}{\sqrt{L^2+R^2}}Rd\varphi$$

$$\vec{E}_L = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\int \frac{R}{(L^2+R^2)^{3/2}}\hat{a}_\rho\, Rd\varphi + \int \frac{L}{(L^2+R^2)^{3/2}}Rd\varphi\hat{a}_z\right\}$$

b)

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{L}{(L^2+R^2)^{3/2}}Rd\varphi\hat{a}_z = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L\pi R}{(L^2+R^2)^{3/2}}\hat{a}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QL}{(L^2+R^2)^{3/2}}\hat{a}_z$$

$$\vec{E}_\rho = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{R}{(L^2+R^2)^{3/2}}\hat{a}_\rho Rd\varphi \text{ , mas } \hat{a}_\rho = cos\varphi\hat{a}_x + sen\varphi\hat{a}_y \text{ , assim}$$

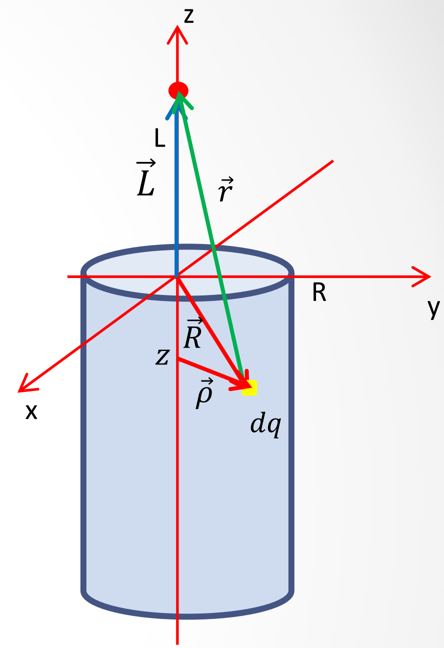
$$\vec{E}_x = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{R}{(L^2+R^2)^{3/2}}cos\varphi\, Rd\varphi\hat{a}_x = 0$$

Pode se argumentar por simetria

$$\vec{E}_y = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{R}{(L^2+R^2)^{3/2}}sen\varphi\, Rd\varphi\hat{a}_y = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2R^2}{(L^2+R^2)^{3/2}}\hat{a}_y = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0}\frac{QR}{(L^2+R^2)^{3/2}}\hat{a}_y$$

9) A figura abaixo mostra um cilindro de raio a e comprimento d, carregado com densidade de carga ϱ_V.
a) Escreva a expressão integral de todas as componentes do campo elétrico para o cálculo do campo elétrico num ponto a uma distância L, a partir da base de cima, em cima do eixo z que está posicionado no centro de simetria do cilindro.
b) Calcule o vetor campo elétrico no ponto do item a.

a) $\vec{L} = L\hat{a}_z \qquad \vec{R} = \rho\hat{a}_\rho + z\hat{a}_z \qquad \rho_V = \dfrac{Q}{\pi R^2 d}$



$$\vec{r} = \vec{L} - \vec{R} = -\rho\hat{a}_\rho + (L-z)\hat{a}_z \qquad \hat{r} = \frac{-\rho\hat{a}_\rho + (L-z)\hat{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + (L-z)^2}}$$

$$\vec{E}_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_V dV}{r^2}\hat{r} = \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{(\rho^2 + (L-z)^2)} \frac{-\rho\hat{a}_\rho + (L-z)\hat{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + (L-z)^2}}\rho d\varphi d\rho dz$$

$$\vec{E}_L = \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\int \frac{\rho^2}{(\rho^2 + (L-z)^2)^{3/2}}\hat{a}_\rho\, d\varphi d\rho dz + \int \frac{(L-z)\rho}{(\rho^2 + (L-z)^2)^{3/2}} d\varphi d\rho dz\hat{a}_z\right\}$$

b)

$$\vec{E}_\rho = -\frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + (L-z)^2)^{3/2}}\hat{a}_\rho\, d\varphi d\rho dz = 0 \quad \textit{Pode se argumentar por simetria}$$

Quando somamos $\hat{a}_\rho$ variando φ o resultado da zero, pois é uma soma vetorial em todas as direções.

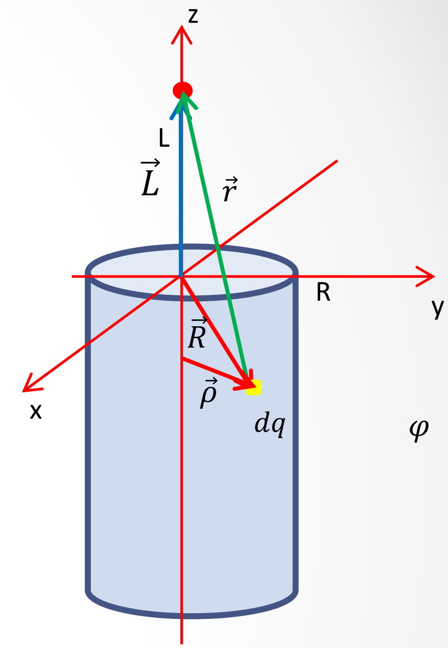
$$\vec{E}_z = \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{(L-z)\rho}{(\rho^2 + (L-z)^2)^{3/2}} d\varphi d\rho dz\hat{a}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\int_0^a \frac{(L-z)\rho}{(\rho^2 + (L-z)^2)^{3/2}} d\rho dz\hat{a}_z$$

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\left[\frac{-(L-z)}{\sqrt{\rho^2 + (L-z)^2}}\right]_0^a dz\hat{a}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\left[\frac{(L-z)}{|L-z|} - \frac{(L-z)}{\sqrt{a^2 + (L-z)^2}}\right] dz\hat{a}_z$$

Continua

Continuação da questão 9

$$\vec{E}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\int_{-d}^{0}\left[\frac{(L-z)}{|L-z|} - \frac{(L-z)}{\sqrt{a^2+(L-z)^2}}\right]dz\hat{a}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\left[z - \sqrt{a^2+(L-z)^2}\right]_{-d}^{0}\hat{a}_z$$



$$\vec{E}_z = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\left[d + \sqrt{a^2+L^2} - \sqrt{a^2+(L+d)^2}\right]\hat{a}_z$$